

## 6 Vertex-Kanten-Dualität

Die Kontraktion aus Kapitel 5 verkleinert den unbeschrifteten Zusammenhangskern. Für die Portguards muss zusätzlich verfolgt werden, wo die ursprünglichen Randpositionen im kontrahierten Kreis liegen.

### 6.1 Der kontrahierte Zwischenkreis

Sei  $B$  ein verbundenes Bi-Tiling ohne  $Q$ -Block. Seine primitiven Blöcke seien  $I_0, \dots, I_{m-1}$ . In  $I_s$  bilde der Dimerpfad  $P_s$  die Verbindung seiner beiden Monomervorkommen. Kontrahiere jeden  $P_s$  zu einem Knoten  $p_s$ .

Jede durch ein altes Monomerpaar erzeugte Kante heiße *Flat-Kante*; lasse diese Kanten  $f_0, \dots, f_{m-1}$  bestehen. Der entstehende zweireguläre Multigraph heißt  $Q(B)$ ; er ist ein Kreis, wobei im terminalen Einblockfall auch eine einzelne Schleife als Kreis gilt. Seine Knoten sind die kontrahierten Blöcke  $p_s$ , seine Kanten die Flat-Kanten  $f_j$ .

### 6.2 Line-Graph-Satz

Für einen zweiregulären Multigraphen mit Schleifen erweitern wir den Linienmultigraphen inzidenziell: Die beiden Inzidenzen an jedem Knoten erzeugen eine Kante zwischen den zugehörigen Kantenknoten; gehören beide Inzidenzen zu derselben Schleife, entsteht eine Schleife im Linienmultigraphen.

**Satz 6.1.** Line-Graph-Dualität. *Identifiziere den Elternrang  $j$  des kontrahierten Wortes  $c(B)$  mit der Flat-Kante  $f_j$ . Die am Elternschritt  $s$  emittierte Rangkante verbindet genau die beiden Flat-Kanten an den Enden von  $P_s$ . Dann gilt*

$$\boxed{K_w(c(B)) \cong L(Q(B))}. \quad (6.1)$$

*Beweis.* Sortiere die Monomervorkommen beider Rails gemeinsam nach ihrer Rangposition, bei einer Gleichheit mit dem linken Vorkommen zuerst. Die beiden Vorkommen eines primitiven Blocks sind zwei aufeinanderfolgende Elemente dieser Liste. Gehören sie zu den Flat-Kanten  $f_u, f_v$ , so ist der kontrahierte Blockknoten  $p_s$  in  $Q(B)$  genau mit  $f_u, f_v$  inzident. Im Liniengraphen erzeugt  $p_s$  deshalb die Kante  $\{f_u, f_v\}$ .

Bei zwei linken Vorkommen sind dies  $A_j, A_{j+1}$ , und der zugehörige  $U$ -Schritt emittiert  $\{j, j+1\}$ . Für zwei rechte Vorkommen gilt dies dual für  $D$ . Im gemischten Fall  $A_j, B_h$  emittiert der  $F$ -Schritt  $\{j, h\}$ . In jedem Fall ist dies genau  $\{u, v\}$ ; im terminalen Fall fallen  $u$  und  $v$  zusammen und beide Seiten von (6.1) besitzen dieselbe Schleife.  $\square$

Die Kontraktion ist somit vertex-kanten-dual:

$$\begin{aligned} \text{primitiver Block } I_s &\longleftrightarrow \text{Kante des Elternrangkreises,} \\ \text{Flat-Kante } f_j &\longleftrightarrow \text{Knoten des Elternrangkreises.} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Insbesondere ist die Elternrangordnung die Monomerpaarordnung, während die Elternkantenordnung die Blockordnung ist. Beide werden erst durch denselben Elternkreis miteinander gekoppelt.

### 6.3 Verlustfreie Expansion

Sei  $\ell_s$  die Ranglänge von  $I_s$ . Bei einem ungeraden  $F$ -Block heißt die Angabe, welche Rail sein erstes Monomer enthält, seine *Railorientierung*. Die vollständigen Blockdaten bestehen für jeden Block aus Typ, Länge, Railorientierung und der dadurch festgelegten alternierenden inneren Tilefolge.

Der *markierte Kindpositionskreis* ist der zyklische Graph, dessen Knoten die ursprünglichen Tile-Ereignisse und damit die Ordnungspositionen des Kindwortes tragen. Aus  $Q(B)$  und den vollständigen Blockdaten wird er wie folgt rekonstruiert:

1. Ersetze den Elternknoten  $p_s$  durch den geordneten Pfad seiner  $\ell_s - 1$  nicht-Flat-Kindereignisse.
2. Unterteile jede Elternkante  $f_j$  durch den zugehörigen Flat-Kindknoten.

Da  $Q(B)$  ein Kreis ist, besitzt er gleich viele Knoten und Kanten, also genau  $m$  Flat-Kanten. Die Zahl rekonstruierter Positionen ist daher

$$\sum_{s=0}^{m-1} (\ell_s - 1) + m = \sum_{s=0}^{m-1} \ell_s = n. \quad (6.3)$$

**Satz 6.2.** Verlustfrei-kein-Schrumpfen. *Eine Kontraktionsstufe reduziert den verbundenen Rangkern von  $n$  auf höchstens  $n - 2$  Elternränge. Erhält man jedoch neben dem Quotienten die vollständigen Blockdaten, so rekonstruiert die Vertexexpansions- und Kantenunterteilungsstruktur weiterhin genau  $n$  markierte physische Randpositionen.*

Ein Sehnenendpunkt an einem nicht-Flat-Ereignis liegt nach der Kontraktion auf dem Expansionspfad eines Elternknotens. Ein Endpunkt an einem Flat-Ereignis liegt auf dem Unterteilungspunkt einer Elternkante.

### 6.4 Faserinvarianz

Fixiere ein Elternwort  $w$ . In seinen primitiven Inflationen dürfen die  $U$ - und  $D$ -Blöcke verschiedene gerade positive Längen und die  $F$ -Blöcke verschiedene ungerade positive Längen besitzen. Wird ein  $F$ -Zeichen von  $w$  auf positiver Motzkinhöhe ausgeführt, können beide in Abschnitt 6.3 definierten Railorientierungen kompatibel sein. Diese Parameter ändern die Quotientenzidenz nicht.

Ist  $\kappa_w(s) = \{u_s, v_s\}$  die vom Elternschritt  $s$  emittierte Rangkante, so gilt in jeder Inflation

$$f_j \text{ ist mit } p_s \text{ inzident} \iff j \in \kappa_w(s). \quad (6.4)$$

Die rechte Seite hängt allein von  $w$  ab. Daher sind die beschrifteten Kreise  $Q(B)$  aller Kinder derselben Inflationsfaser kanonisch isomorph. Die Adressen der expandierten Randpositionen werden durch die vollständigen Blockdaten bestimmt.

## 7 Die gemeinsame Auswahl

Seien  $F_1, \dots, F_m$  die beschränkten Flächen des fixierten Outerpaths in ihrer Reihenfolge auf dem schwachen Dualpfad. Für  $1 \leq i < m$  sei  $s_i$  die Sehne im gemeinsamen Rand von  $F_i$  und  $F_{i+1}$ . Da jede Sehne genau zwei beschränkte Flächen trennt, sind  $s_1, \dots, s_{m-1}$  sämtliche Sehnen von  $G$ . Damit tragen die Portkontakte des Outerpaths eine feste lineare Reihenfolge.

Für  $n = |V(G)|$  sei  $\mathfrak{T}_n$  die Menge aller verbundenen Kontraktionstürme, deren Anfangsobjekt  $Z_0$  ein Bi-Tiling auf  $n$  Rängen ist. Eine *Turmphase* ist ein Paar  $(\Theta, \phi)$  aus einem Turm  $\Theta \in \mathfrak{T}_n$  und einer der  $2n$  Phasen, welche den Rangkreis von  $Z_0$  mit dem Randkreis von  $G$  identifizieren.

Zu jeder Turmphase gehört nach Kapitel 4 die 2-CNF

$$\Phi_{G, Z_0, \phi}. \quad (7.1)$$

Ihre Variablen beschreiben genau die Ballot-legalen Shuffles von  $Z_0$ ; ihre Guardklauseln beschreiben genau die Portkontakte der Sehnen  $s_1, \dots, s_{m-1}$ .

### 7.1 Gemeinsamer Auswahlssatz

**Satz 7.1.** Gemeinsamer Auswahlssatz.

|                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $G \text{ besitzt eine 1-Queue-Anordnung} \\ \iff \exists(\Theta, \phi) [\Theta \in \mathfrak{T}_n \wedge \Phi_{G, Z_0, \phi} \text{ ist erfüllbar}].$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(7.2)

*Beweis.* Besitzt  $G$  eine 1-Queue-Anordnung, so liefert der Rangkreis-Normalformsatz eine RCPC-Lösung. Der Bi-Tiling-Satz zerlegt deren Rangpfad in ein verbundenes Bi-Tiling  $Z_0$ , einen Ballot-legalen Shuffle und eine Phase  $\phi$ . Nach der Eindeutigkeit der Kontraktion ist  $Z_0$  Anfangsobjekt eines eindeutigen verbundenen Kontraktionsturms  $\Theta$ . Der bijunktive Fasersatz zeigt, dass die zum Shuffle gehörige Thresholdbelegung (7.1) erfüllt.

Umgekehrt liefert ein Turm  $\Theta \in \mathfrak{T}_n$  ein verbundenes Anfangs-Bi-Tiling  $Z_0$ . Eine erfüllende Belegung von (7.1) liefert nach dem bijunktiven Fasersatz einen Ballot-legalen Shuffle, der in Phase  $\phi$  sämtliche Portkontakte erfüllt. Dies ist eine RCPC-Lösung und erzeugt nach dem Rangkreis-Normalformsatz eine 1-Queue-Anordnung von  $G$ . □